1.1. Système discret

La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète. Donc la FT en discret est exprimé en utilisant la variable Z. Les systèmes discrets constituent un axe important dans la commande depuis l’évolution des calculateurs numériques. Les systèmes commandés par calculateurs sont presque toujours des systèmes physiques continus par nature. Le calculateur traite par contre les entrées et les sorties de manière discrète. La représentation d’état des systèmes discrets linéaires comme pour les systèmes continus est plus large que la fonction de transfert pour plusieurs raisons . On peut citer : la linearite et CI nulles. Dans la modélisation dans l’espace detat le système nest plus une boite noire mais il est considéré par des variables internes appelés variables d’état.

1.2. Variables d’état en temps discret

En temps discret, il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateurs dits de décalage de FT Z^{-1}

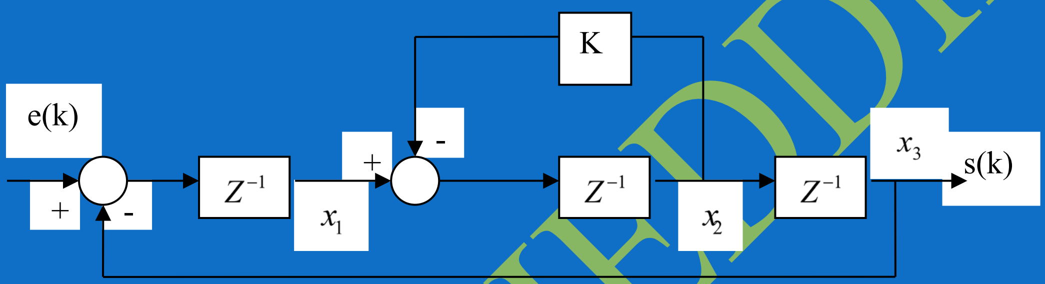


Figure 5-1 schéma bloc d’un système discret

$X_3(Z) = Z^{-1}X_2(Z)$ en représentation temporelle à temps discret donne $x_3(k+1) = x_2(k)$. D’où la dénomination d’opérateur de décalage.

x(k) représente le signal aux instants kTe où Te représente la période d’échantillonnage de tous les signaux présents dans le système. La modélisation d’un système discret pour un système mono-entrée mono-sortie est la suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Be(k) \\ s(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{5-1}$$

A est une matrice de commande carrée $A(n, n)$

B est un vecteur colonne $B(n, 1)$

C est un vecteur ligne $C(1, n)$

Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = (0 \quad 0 \quad 1)$

Si le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties où

n est le nombre de variables d’état,

m est le nombre d’entrées

p est le nombre de sorties

On a alors

$x(k+1) = Ax(k) + Be(k)$

$s(k) = Cx(k) + De(k)$

A est de dimension (n,n)

B est une matrice (n,m)

C est une matrice (p,n)

D est une matrice (m,p)

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C(0 \quad 0 \quad 1)$

Résolution des équations d'état

Ceci signifie prédiction de l'état du système à un instant quelconque

$$\begin{cases} x(1) = Ax(0) + Be(0) \\ x(2) = Ax(1) + Be(1) \\ \vdots \\ x(i) = Ax(i-1) + Be(i-1) \\ \vdots \\ x(k-1) = Ax(k-2) + Be(k-2) \\ x(k) = Ax(k-1) + Be(k-1) \end{cases}$$

En remplaçant successivement, on obtient: $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Be(i)$

La matrice de transition est égale à A^k et se calcule sans aucune difficulté

1.3. Critère de commandabillité

La **commandabilité** mesure si on peut **amener le système d'un état initial à n'importe quel état final en un nombre fini de pas**, grâce aux commandes $u[k]$.

Un système complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs B, AB, A^2B, …$A^{n-1}B$ sont linéairement indépendant c'est-à-dire la matrice de commandabilité est régulière.

Pour un système discret, on définit la **matrice de commandabilité** $\mathcal{C}$comme :

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

où $n$est la dimension du vecteur d'état $x[k]$.

1.4. Critère d'observabilité

Un système est complètement observable si et seulement si le vecteurs colonne C^T, A^TC^T, $A^{T2}C^T$,…, $A^{Tn-1}C^T$ sont linéairement indépendants. Autrement dit, on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée de n vecteurs colonnes C^T, C^T, A^TC^T, $A^{T2}C^T$,…, $A^{Tn-1}C^T$ et le système est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière c'est-à-dire son déterminant n'est pas nul.

Pour un système discret, on définit la **matrice d'observabilité** $\mathcal{O}$ comme :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- **Condition** : le système est **observable** si et seulement si $\mathrm{rang}(\mathcal{O}) = n$.

1.5.Calcul de la FT à partir de la représentation d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Be(k) \\ s(k) = Cx(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ZX(Z) = AX(Z) + BE(Z) \\ S(Z) = CX(Z) \end{cases}$$

$$X(Z) = (ZI - A)^{-1} BE(Z)$$

$$S(Z) = C(ZI - A)^{-1} BE(Z)$$

$$G(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = C(ZI - A)^{-1} B$$

5-1

1.6.Calcul de la représentation d'état à partir de la FT

Représentation modale

$$G(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\alpha_1}{Z - p_1} + \frac{\alpha_2}{Z - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{Z - p_n}$$

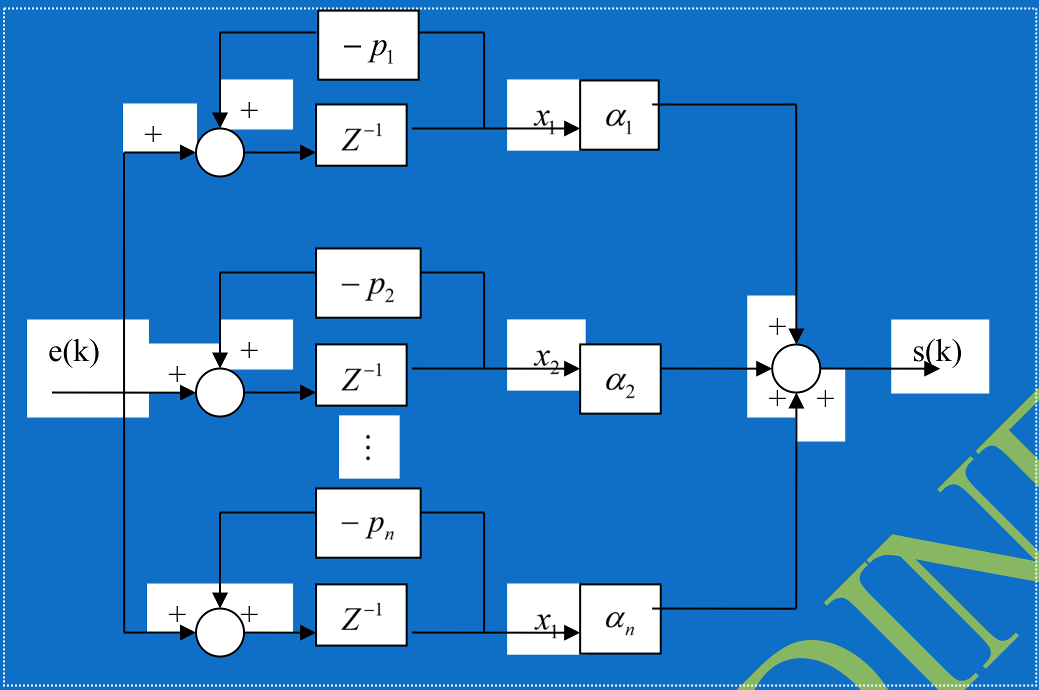


Figure 5-1 Schéma bloc d'un système discret en représentation modale

On $x_i(k+1) = p_i x_i(k) + e(k)$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \qquad \textbf{5-2}$$

$$C = (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n)$$

La matrice A est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la FT

Représentation série

$$G(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{\alpha}{(Z-p_1)(Z-p_2)X\cdots X(Z-p_n)}$$

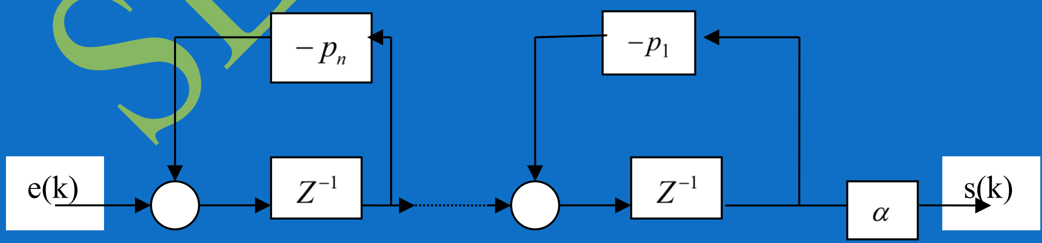


Figure 5-2 Schéma bloc d'un système discret en représentation série

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & p_n \end{bmatrix} x(k)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \qquad \textbf{5-3}$$

Représentation compagne commandale

$$G(Z)=\frac{b_m Z^{m-n}+b_{m-1}Z^{m-n-1}+\cdots+b_1 Z^{-n+1}+b_0 Z^{-n}}{1+a_{n-1}Z^{-1}+\cdots+a_1 Z^{-n+1}+a_0 Z^{-n}}$$

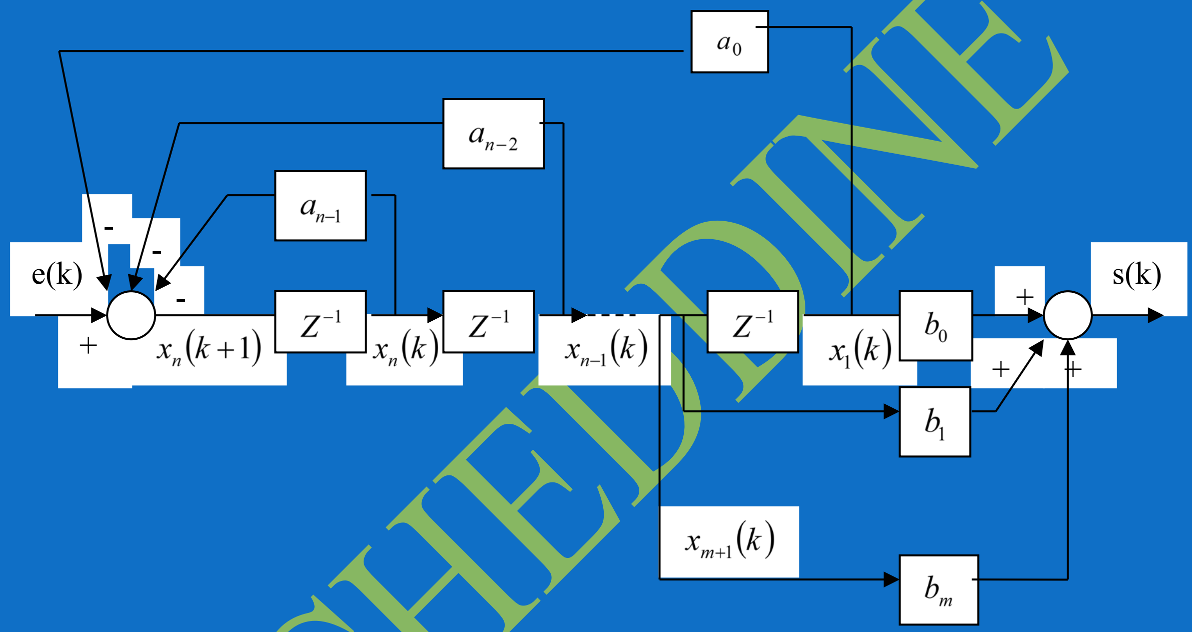


Figure 5-3 Représentation compagne commandable

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1)=x_n(k) \\ x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\cdots-a_{n-1}x_n(k)+e(k) \\ s(k)=b_0x_1(k)+b_1x_2(k)+\cdots+a_mx_{m+1}(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(k)+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k)=\begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{cases} \qquad \textbf{5-4}$$

Représentation compagne observable

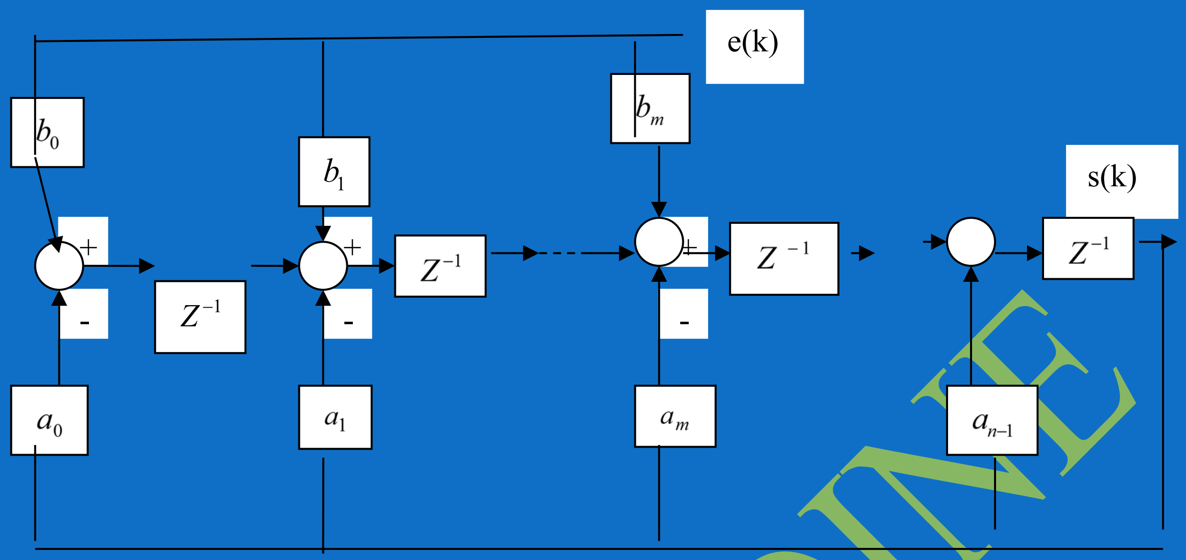


Figure 5-4 Schéma bloc d'un système discret en représentation compagne observable

1.7. Exercices proposés

Exercice 1

Considérons un système régi par l'équation de commande

$$x(k+1) = Ax(k) + Be(k) \text{ avec } A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le système est sollicité par un échelon unité. L'état initial est x(0)=0

Déterminer les 5 premiers échantillons correspondants aux 2 signaux du vecteur d'état

Exercice 2

$$x(k+1) = Ax(k) + Be(k)$$

$$s(k) = Cx(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

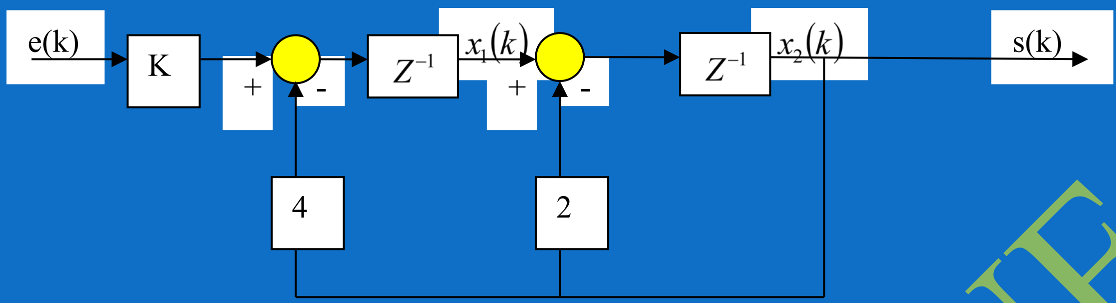
Etudier l'observabilité

Exercice 3

On considère $G(Z) = \dfrac{KZ^{-2}}{1 + 2Z^{-1} + 4Z^{-2}}$

Proposer une représentation d'état de ce système sous forme compagne observable

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$



Forme compagne observable